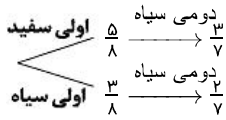
سوال ۱

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

راه حل اول: با استفاده از نمودار درختی داریم:



$$P(\text{دومی سیاه}) = \frac{۵}{۸} \times \frac{۳}{۷} + \frac{۳}{۸} \times \frac{۲}{۷} = \frac{۳}{۸} = ۰/۳۷۵$$

راه حل دوم: در حالتی که از رنگ مهرهٔ اول اطلاع نداریم، احتمال رنگ‌ها مشابه حالتی است که هیچ مهره‌ای برنداشته‌ایم. بنابراین احتمال آن که رنگ مهرهٔ دوم سیاه باشد، همان $\frac{۳}{۸} = ۰/۳۷۵$ است.

سوال ۲

پاسخ: گزینه ۱

گزینهٔ «۱»

با استفاده از قانون احتمال کل داریم:

$$\xrightarrow{\text{انتخاب ظرف}} \begin{cases} A : \frac{۱}{۳} \xrightarrow{\text{انتخاب مهره}} \frac{\binom{۴}{۲}\binom{۵}{۲}}{\binom{۹}{۴}} = \frac{\frac{۴\times۳}{۲} \times \frac{۵\times۴}{۲}}{\frac{۹\times۸\times۷\times۶}{۴\times۳\times۲\times۱}} = \frac{۶۰}{۱۲۶} \\ B : \frac{۱}{۳} \xrightarrow{\text{انتخاب مهره}} \frac{\binom{۶}{۲}\binom{۳}{۲}}{\binom{۹}{۴}} = \frac{\frac{۶\times۵}{۲} \times \frac{۳\times۲}{۲}}{\frac{۹\times۸\times۷\times۶}{۴\times۳\times۲\times۱}} = \frac{۴۵}{۱۲۶} \\ C : \frac{۱}{۳} \xrightarrow{\text{انتخاب مهره}} \frac{\binom{۶}{۲}\binom{۳}{۲}}{\binom{۹}{۴}} = \frac{\frac{۵\times۶}{۲} \times \frac{۳\times۲}{۲}}{\frac{۹\times۸\times۷\times۶}{۴\times۳\times۲\times۱}} = \frac{۴۵}{۱۲۶} \end{cases}$$

$$\Rightarrow P = \frac{۱}{۳} \times \frac{۶۰}{۱۲۶} + \frac{۱}{۳} \times \frac{۴۵}{۱۲۶} + \frac{۱}{۳} \times \frac{۴۵}{۱۲۶} = \frac{۱}{۳}\left(\frac{۶۰+۴۵+۴۵}{۱۲۶}\right)$$

$$= \frac{۱}{۳} \times \frac{۱۵۰}{۱۲۶} = \frac{۲۵}{۶۳}$$

سوال ۳

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

اگر احتمال شرکت امیر و بهروز در مسابقه علمی را به‌ترتیب با A و B نمایش دهیم، آنگاه داریم:

$$P(A) = ۰/۶ \quad , \quad P(B) = ۰/۳$$

$$P(A|B) = ۰/۵ \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = ۰/۵$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = ۰/۵ \times ۰/۳ \Rightarrow P(A \cap B) = ۰/۱۵$$

$$P(A|B') = \frac{P(A \cap B')}{P(B')} = \frac{P(A)-P(A \cap B)}{۱-P(B)} = \frac{۰/۶-۰/۱۵}{۱-۰/۳}$$

$$P(A|B') = \frac{۰/۴۵}{۰/۷} = \frac{۹}{۱۴}$$

سوال ۴

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

اگر $A_۱$ پیشامد انتخاب دسته اول و $A_۲$ پیشامد انتخاب دسته دوم و W پیشامد انتخاب دو کارت سفید باشد، آن‌گاه:

$$P(A_۱|W) = \frac{P(A_۱)P(W|A_۱)}{P(A_۱)P(W|A_۱)+P(A_۲)P(W|A_۲)}$$

$$= \frac{\frac{۱}{۲} \times \frac{\binom{۶}{۲}}{\binom{۱۱}{۲}}}{\frac{۱}{۲} \times \frac{\binom{۶}{۲}}{\binom{۱۱}{۲}} + \frac{۱}{۲} \times ۱} = \frac{\frac{۱}{۲} \times \frac{۱۵}{۵۵}}{\frac{۱}{۲} \times \frac{۱۵}{۵۵} + \frac{۱}{۲}} = \frac{۳}{۱۴}$$

سوال ۵

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

انتخاب یکی از دوکیسه در مرحله اول به‌طور تصادفی و با شانس برابر انجام می‌شود. احتمال انتخاب مهره سفید از کیسه‌های اول و دوم به ترتیب برابر $\frac{۳}{۵}$ و $\frac{۳}{۸}$ است. با افزودن مهره سفید به هر یک از کیسه‌ها، ترکیب آن‌ها دچار تغییر می‌شود. اگر پیشامد خارج شدن دو مهره سفید را با A نمایش دهیم، داریم:

$$P(A) = \frac{۱}{۲} \times \frac{۳}{۵} \times \frac{۴}{۹} + \frac{۱}{۲} \times \frac{۳}{۸} \times \frac{۴}{۶} = \frac{۲}{۱۵} + \frac{۱}{۸} = \frac{۳۱}{۱۲۰}$$

سوال ۶

پاسخ: گزینه ۲

فضای نمونه کاهش یافته در این احتمال شرطی دارای $\binom{۵}{۲} = ۱۰$ عضو است. پیشامد مطلوب به دو صورت زیر است:

$$\begin{cases} \boxed{\text{پشت}}\ \underbrace{\square\square\square}_{\text{بار ۲ رو در سه پرتاب}}\ \boxed{\text{پشت}} \Rightarrow \binom{۳}{۲} = ۳ \\ \boxed{\text{رو}}\ \underbrace{\square\square\square}_{\text{هر سه پرتاب پشت}}\ \boxed{\text{رو}} \Rightarrow \binom{۳}{۳} = ۱ \end{cases}$$

پس پیشامد مطلوب ۴ عضو دارد.

$\Rightarrow$احتمال مورد نظر $= \frac{۴}{۱۰} = \frac{۲}{۵}$

سوال ۷

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

برای محاسبه تعداد اعضای فضای نمونه کاهش یافته ابتدا از بین ۱۰ جایگاهی که برای اعضای تیم وجود دارد. باید ۳ تا انتخاب کنیم، علی را در جایگاه وسطی و مازیار را در جایگاه کوتاه‌تر و کامران را در جایگاه بلندتر قرار بدهیم، بنابراین:

$n(S) = \binom{۱۰}{۳} = ۱۲۰$

پیشامد مطلوب آن است که علی در رتبه چهارم باشد، پس:

$$\underbrace{\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc}_{\text{مازیار}}\ \underset{\text{علی}}{\otimes}\ \underbrace{\bigcirc\bigcirc\bigcirc}_{\text{کامران}}$$

$n(A) = \binom{۳}{۱}\binom{۶}{۱} = ۳ \times ۶ = ۱۸$

$\Rightarrow P(A) = \frac{۱۸}{۱۲۰} = \frac{۳}{۲۰}$

سوال ۸

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

در یک بار پرتاب این تاس احتمال رو شدن اعداد ۱، ۲ و ۳ به‌ترتیب برابر $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۱}{۶}$ است. اگر A پیشامد آن باشد که عدد روشده در پرتاب دوم بزرگتر یا مساوی عدد روشده در پرتاب اول است و $B_۱$، $B_۲$ و $B_۳$ به‌ترتیب پیشامدهای روشدن اعداد ۱، ۲ و ۳ در پرتاب اول باشند، آنگاه داریم:

$$P(A) = P(B_۱)P(A|B_۱) + P(B_۲)P(A|B_۲) + P(B_۳)P(A|B_۳)$$

$$= \frac{۱}{۲} \times ۱ + \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۶} \times \frac{۱}{۶} = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۳۶} = \frac{۲۵}{۳۶}$$

اگر C پیشامد آن باشد که مجموع دو عدد رو شده برابر ۴ است، با توجه به مستقل بودن پرتاب دو تاس از یکدیگر داریم:

$$C \cap A = \{(۱,۳),(۲,۲)\}$$

$$P(C|A) = \frac{P(C \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۳}}{\frac{۲۵}{۳۶}} = \frac{\frac{۷}{۳۶}}{\frac{۲۵}{۳۶}} = \frac{۷}{۲۵}$$

سوال ۹

پاسخ: گزینه ۴

گزینه ی «۴»

فرض کنید تاس اول سفید و تاس دوم سیاه باشد. اگر پیشامدهای B و A به ترتیب به صورت «مجموع اعداد رو شده دو تاس کمتر از ۶ باشد» و «عدد تاس سفید از عدد تاس سیاه کمتر نباشد» تعریف شوند، آنگاه داریم:

$$B = \{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۱,۴),(۲,۱),(۲,۲),(۲,۳),(۳,۱),(۳,۲),(۴,۱)\}$$

$$A \cap B = \{(۱,۱),(۲,۱),(۲,۲),(۳,۱),(۳,۲),(۴,۱)\}$$

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{۶}{۱۰} = \frac{۳}{۵}$$

سوال ۱۰

پاسخ: گزینه ۱

گزینهٔ «۱»

پیشامد آن که محمد به هدف بزند را A و پیشامد آن که مرتضی به هدف بزند را B در نظر می‌گیریم، بنابراین پیشامد این که حداقل یک تیر به هدف اصابت کند $A \cup B$ خواهد بود. داریم:

$$P(A|A \cup B) = \frac{P(A\cap(A\cup B))}{P(A\cup B)} = \frac{P(A)}{P(A\cup B)}$$

$$= \frac{۰/۶}{۰/۶+۰/۳-۰/۶\times۰/۳} = \frac{۵}{۶}$$

توجه داشته باشید که A و B مستقل از یکدیگر هستند.